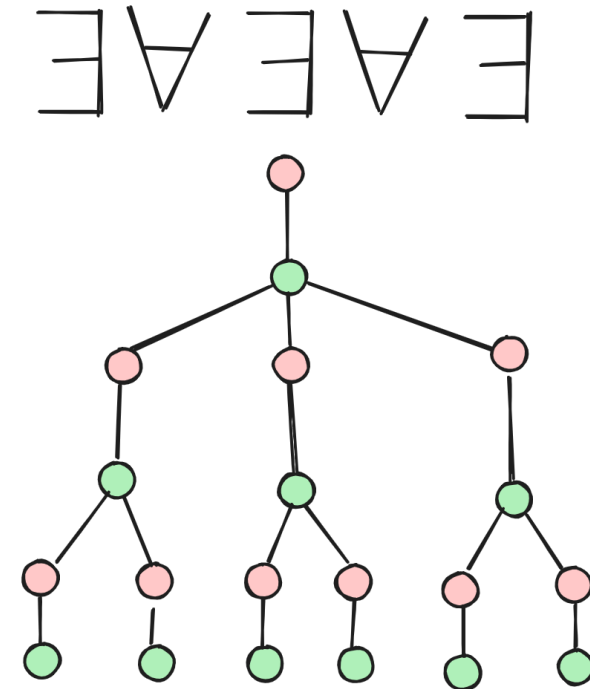


Savitchev izrek, PSPACE polnost

Uroš Čibej



Pregled snovi

1. Savitchev izrek
2. Igre
3. TQBF
4. PSPACE-polnost

Savitchev izrek

$$NSPACE(f(n)) = DSPACE(f^2(n))$$

Posledica izreka

$$PSPACE = NPSPACE$$

(nedeterminizem ne povečuje učinkovitosti porabe prostora)

Naivna simulacija nedeterminizma

(in poraba prostora)

- nek obhod drevesa izvajanja
- vsako vozlišče je konfiguracija ($f(n)$ prostora)
- globina drevesa je največ $2^{f(n)}$

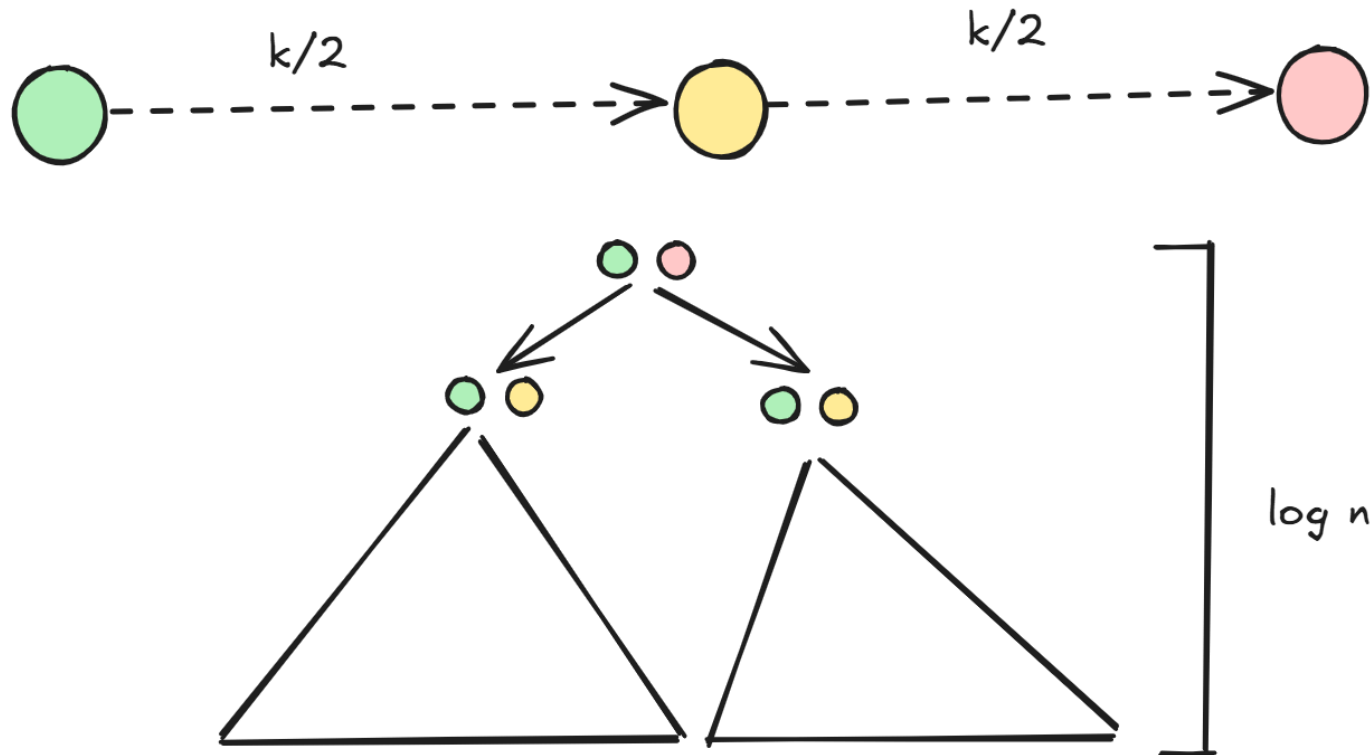
Skupaj torej $f(n)2^{f(n)}$ prostora

S-T pot z nedeterminizmom

$\log n$ prostor

```
def st-path(G, s, t):  
    count = 0  
    current = s  
    while count < n:  
        if current == t:  
            return True  
        current = nedeterministični sosed vozlišča current  
        count += 1  
    return False
```

S-T pot z determinizmom



Rekurzivni algoritem

```
def st-path(G, s, t, k):  
    if k==1 and (s,t) in G:  
        return True  
    for v in G:  
        if st-path(G,s,v,k/2) and st-path(G,v,t,k/2):  
            return True  
    return False
```


Prostorska zahtevnost algoritma

- vsako vozlišče hrani tri števila s, t, k - $O(\log n)$ prostora
- globina rekurzije je $\log n$
- celoten algoritem porabi torej največ prostora:

$$\log^2 n$$

Aplikacija v Savitchevem izreku

dokaz tega izreka

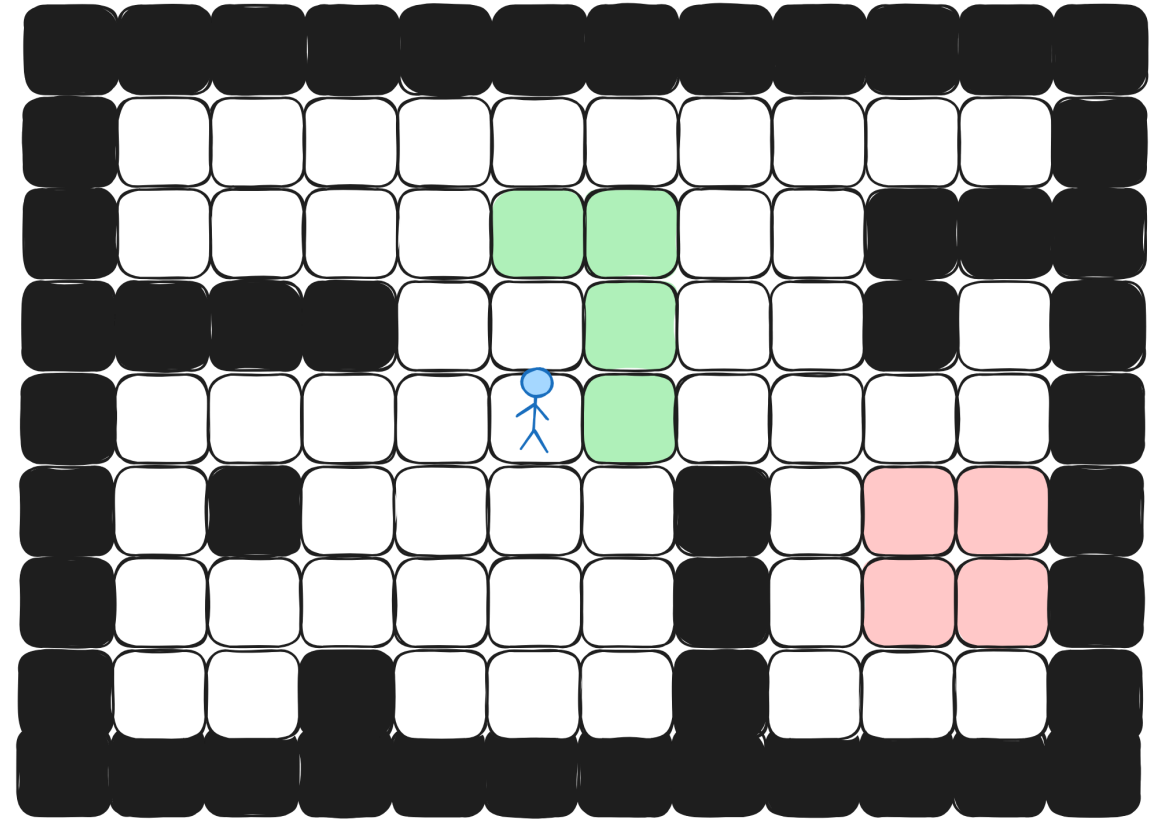
- simuliramo NTS M , ki porabi $f(n)$ prostora
- simulacija je iskanje poti med začetno konfiguracijo C_s in neko končno konfiguracijo C_t
- graf vseh možnih konfiguracij ima $2^{f(n)}$ vozlišč
- iskanje poti C_s do C_t torej porabi prostora:

$$\log^2 2^{f(n)} = f^2(n)$$

Primeri problemov

- Igre z enim igralcem
 - Sokoban
 - Klotski
- Igre z dvema igralcema
 - Hex
 - Posložena geografija
- TQBF - resnične kvantificirane Boolove formule

Sokoban



Formalna definicija

$$P = (G, B, T, s)$$

- $G \subset \mathbb{Z}^2$ (množica prostih celic- ostalo so zidovi)
- $B \subseteq G$ (začetne pozicije zabojev)
- $T \subseteq G$ (ciljne celice)
- $s \in G \setminus B$ (začetna pozicija možica)

Stanje in premik

- stanje igre $\sigma = (s', B')$
- $\sigma \xrightarrow{d} \sigma'$ - sprememba stanja pri enem premiku
- Igra $P = (G, B, T, s)$ je **rešljiva**, če $\exists(d_1, d_2, \dots, d_m)$, da velja

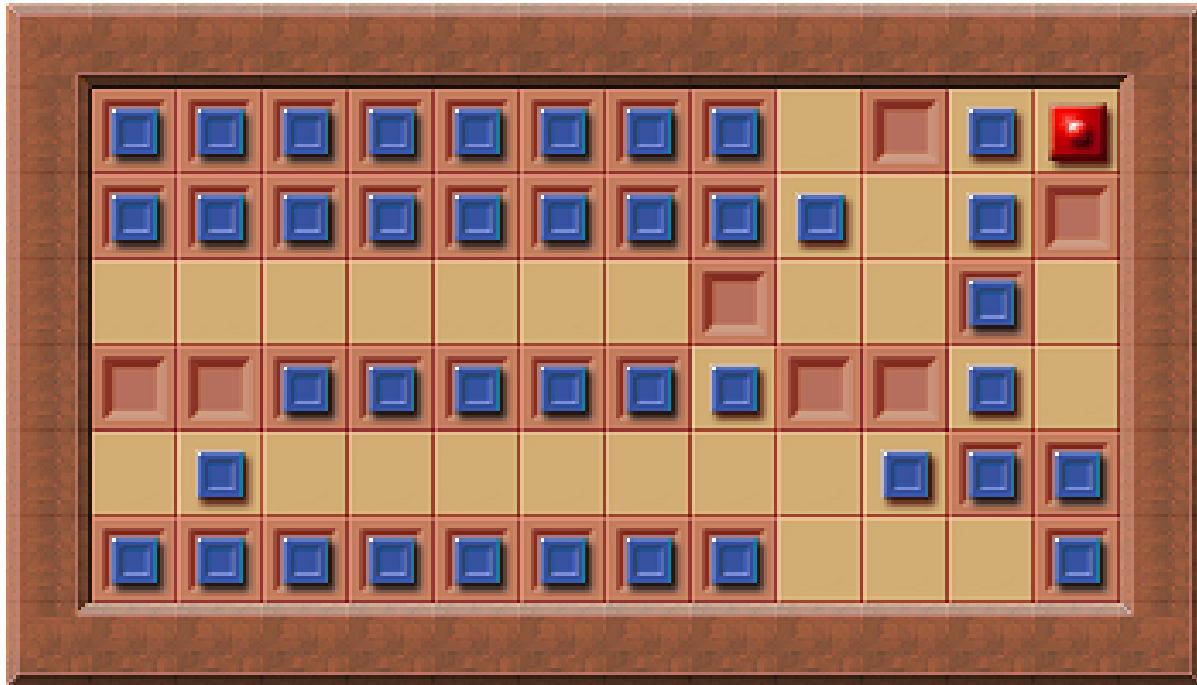
$$(s, B) \xrightarrow{d_1, d_2, \dots, d_m} (s', B'); B' = T$$

Odločitveni problem Sokoban

Vhod: $P = (G, B, T, s)$

Vprašanje: Ali je P rešljiv?

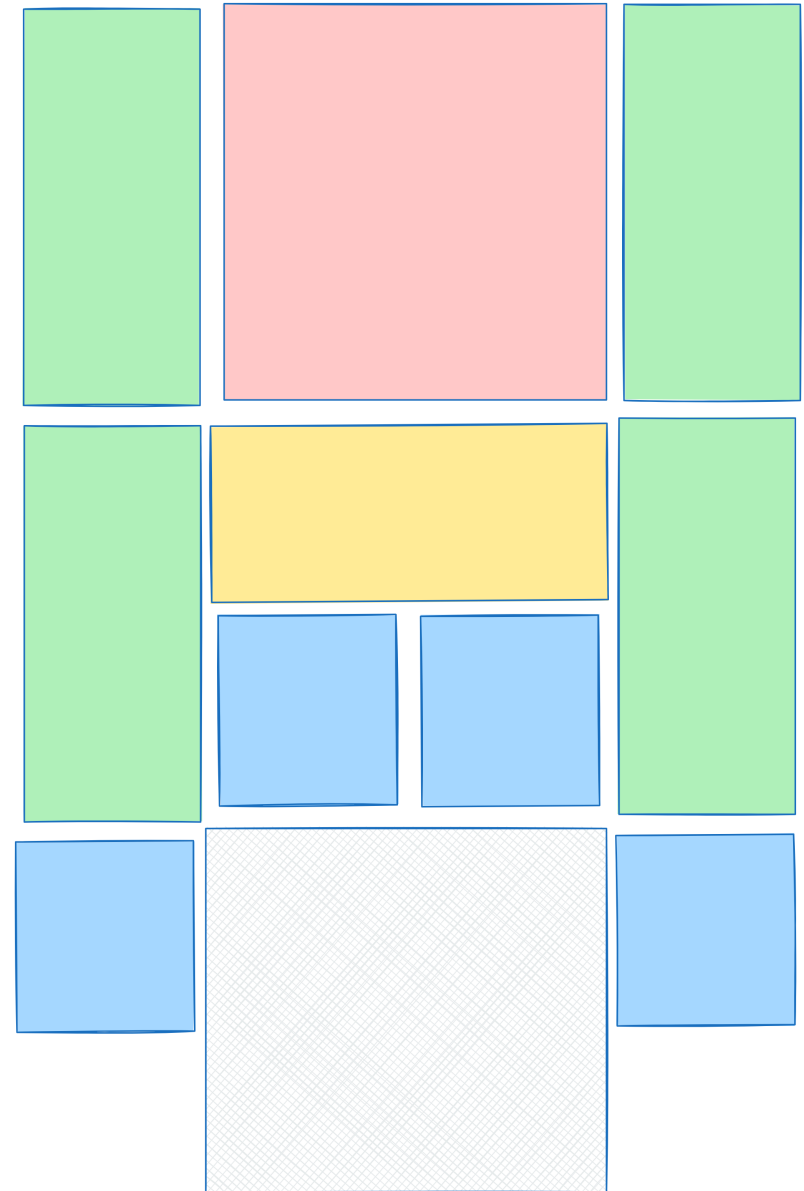
Sokoban $\in NP$?



vir: <https://www.mzrg.com/sokoban/>

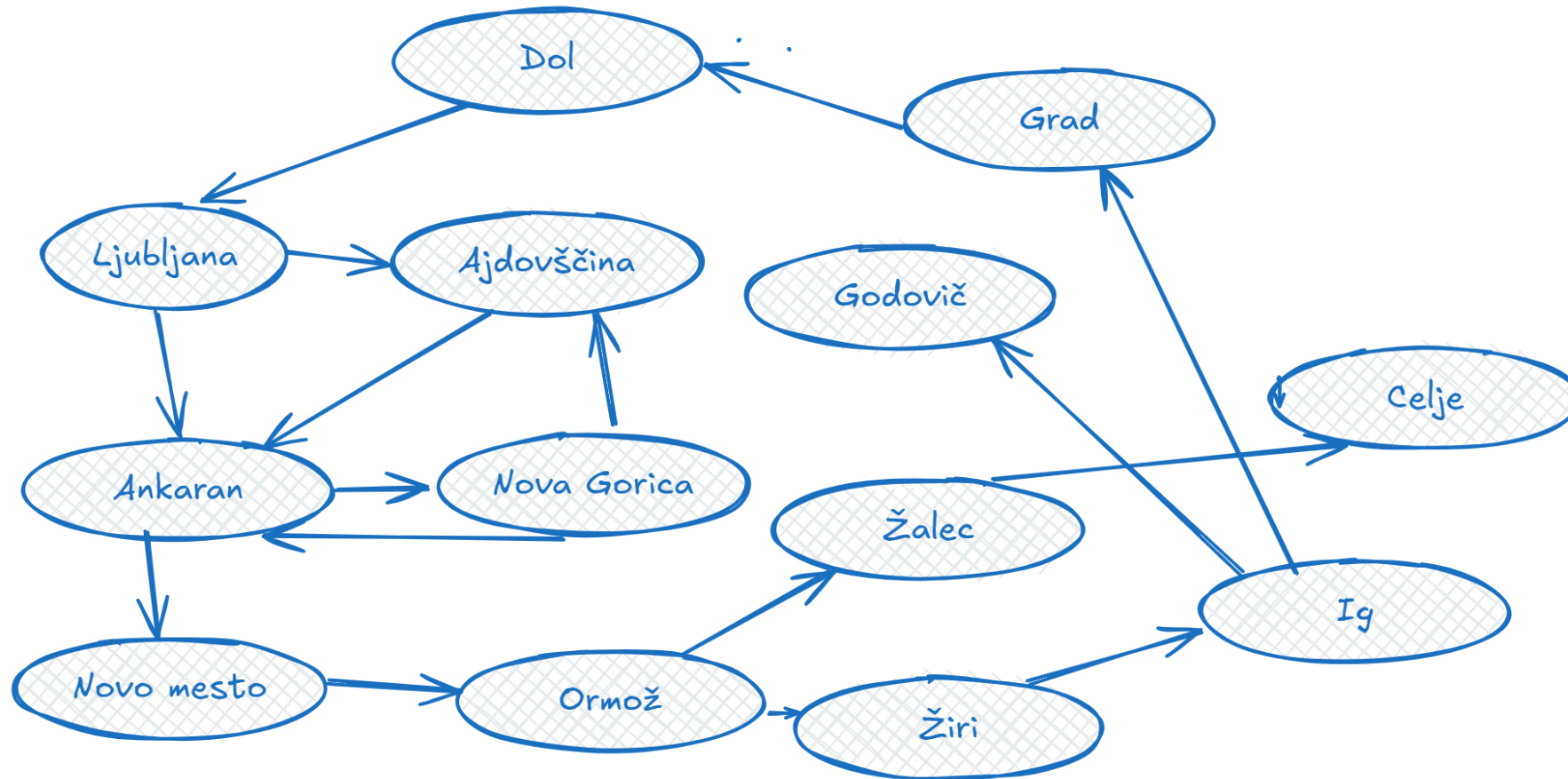
vsaj 6170 potez

Klotski



Igre z dvema igralcema

Posplošena geografija



Formalna definicija

$$P = (G, s)$$

- $G = (V, E)$ usmerjen graf
- $s \in V$ začetno vozlišče

Stanje in premik

- stanje igre: $\sigma = (v, S)$ - trenutno stanje in $S \subseteq V$ trenutno obiskana vozlišča
- premik: $(v, S) \xrightarrow{v'} (v', S \cup \{v'\})$
- veljaven premik: $(v, v') \in E, v' \notin S$

Zmagovalna strategija

$$Win(v, S) \iff \exists v' \in V : \left((v, S) \xrightarrow{v'} (v', S \cup \{v'\}) \right) \wedge \neg Win(v', S \cup \{v'\})$$

robni pogoj:

$$\neg Win(v, S) \quad \text{če} \quad \{v' \in V \mid (v, v') \in E, v' \notin S\} = \emptyset$$

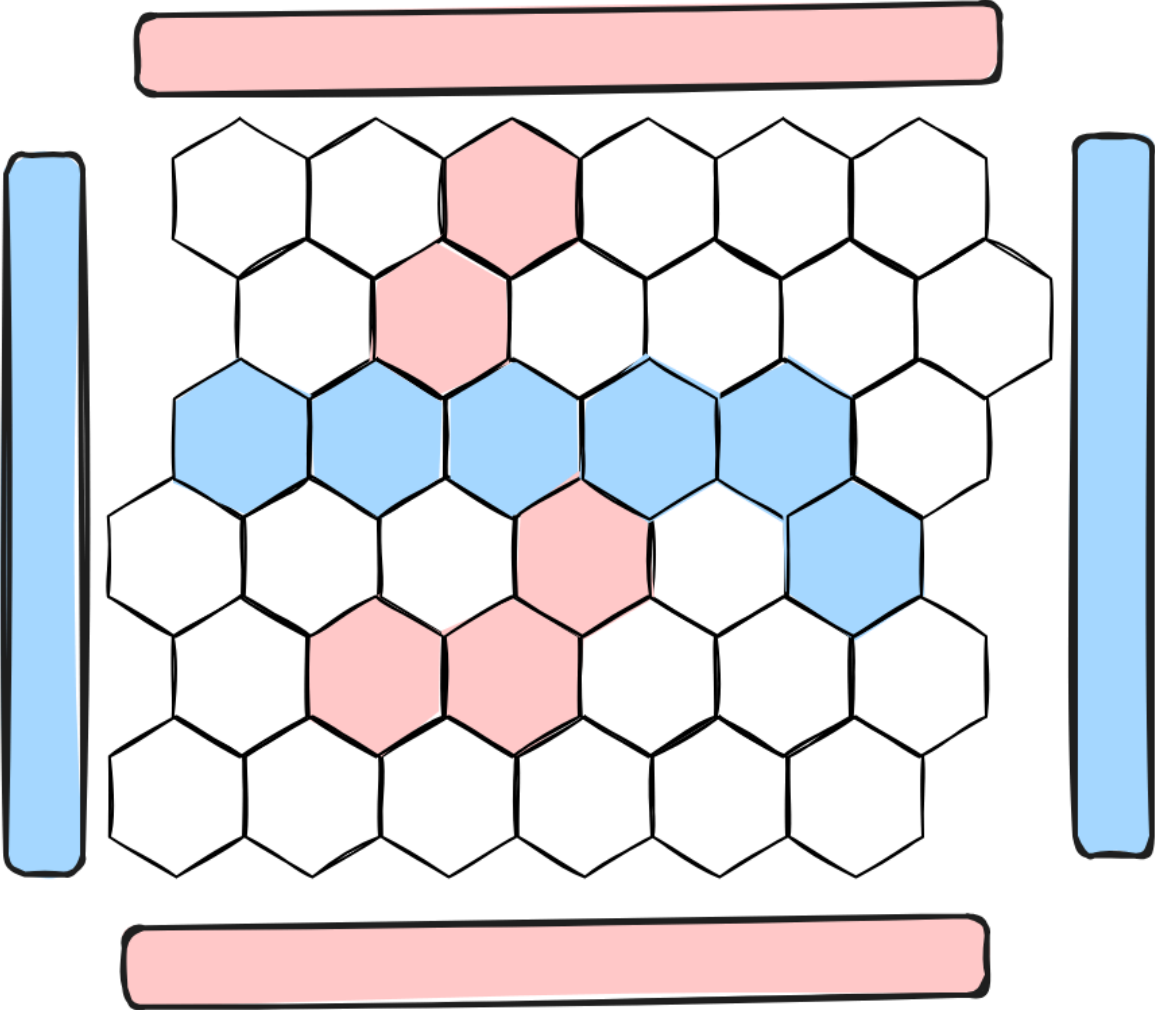
Odločitveni problem - Posplošena geografija

Vhod: $P = (G, s)$

Vprašanje: Ali drži $Win(s, \{s\})$? (ali obstaja zmagovalna strategija)

Posplošena geografija $\in NP$?

Hex



Ključna lastnost teh iger

Trajanje iger je največ **polinomsko mnogo potez**

TQBF

vhod: popolnoma kvantificirana formula (v t.i. prenex obliki):

$$\Psi = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

vprašanje: Ali je Ψ resnična?

Primer

$$\Psi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 [(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)]$$

PSPACE polnost

Problem A je *PSPACE* poln, če:

1. $A \in PSPACE$
2. $\forall B \in PSPACE : B \leq_p A$

Oris PSPACE polnosti problema TQBF

- Ideja zelo podobna Cook-Levinovem izreku
- Iščemo pot od začetne C_s do neke končne C_t konfiguracije
 - dolžina izraza je eksponentna
 - kako uporabiti kvantifikatorje, da skrajšamo izraz?
- "Simuliramo" Savitchev algoritem in "recikliramo" spremenljivke
- Potrebujemo zgolj tako dolg izraz kot je višina Savitchevega drevesa

Znani *PSPACE* polni problemi

- Sokoban
- Rush-hour
- Hex
- Dama
- ekvivalenca NKA, regularnih izrazov
- planiranje STRIPS (formalizem za plane)