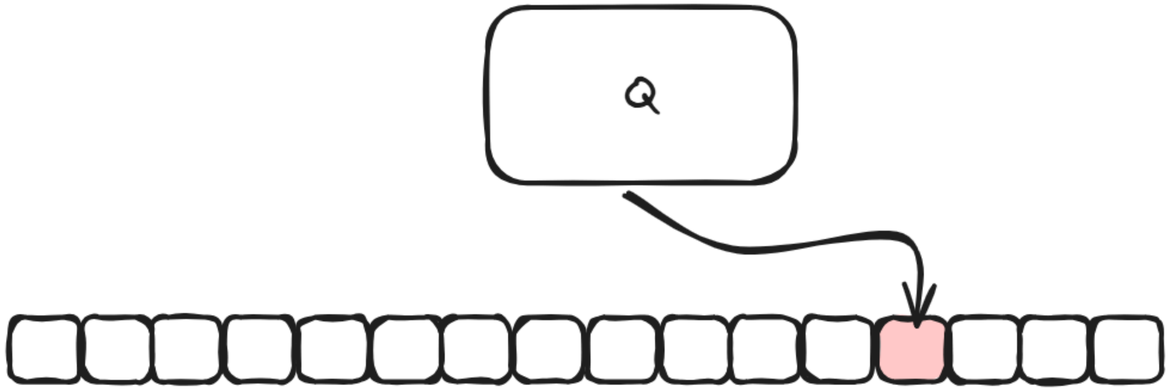
# Uvod v računske modele

Uroš Čibej



# Pregled

1. Birokracija
2. Motivacija
3. Računski modeli in časovna zahtevnost

# Birokracija

- **predavanja:** Uroš Čibej (uros.cibej@fri.uni-lj.si)
- **vaje:** Lidija Stanovnik (lidija.stanovnik@fri.uni-lj.si)

# Ocenjevanje

1. Sprotne obveznosti:
    - kolokvij 1 (začetek aprila)
    - kolokvij 2 (konec maja)
2. Pisni izpit (pogoj za pristop k izpitu: povprečje kolokvijev 50%)
3. Ustni izpit (po potrebi)

# Motivacija

- primeri problemov, ki nas bodo zanimali
- kaj lahko o njih grobo povemo
- kakšne algoritme poznamo
- poznamo kakšne spodnje meje za hitrost reševanja
- ...

# Problem klike

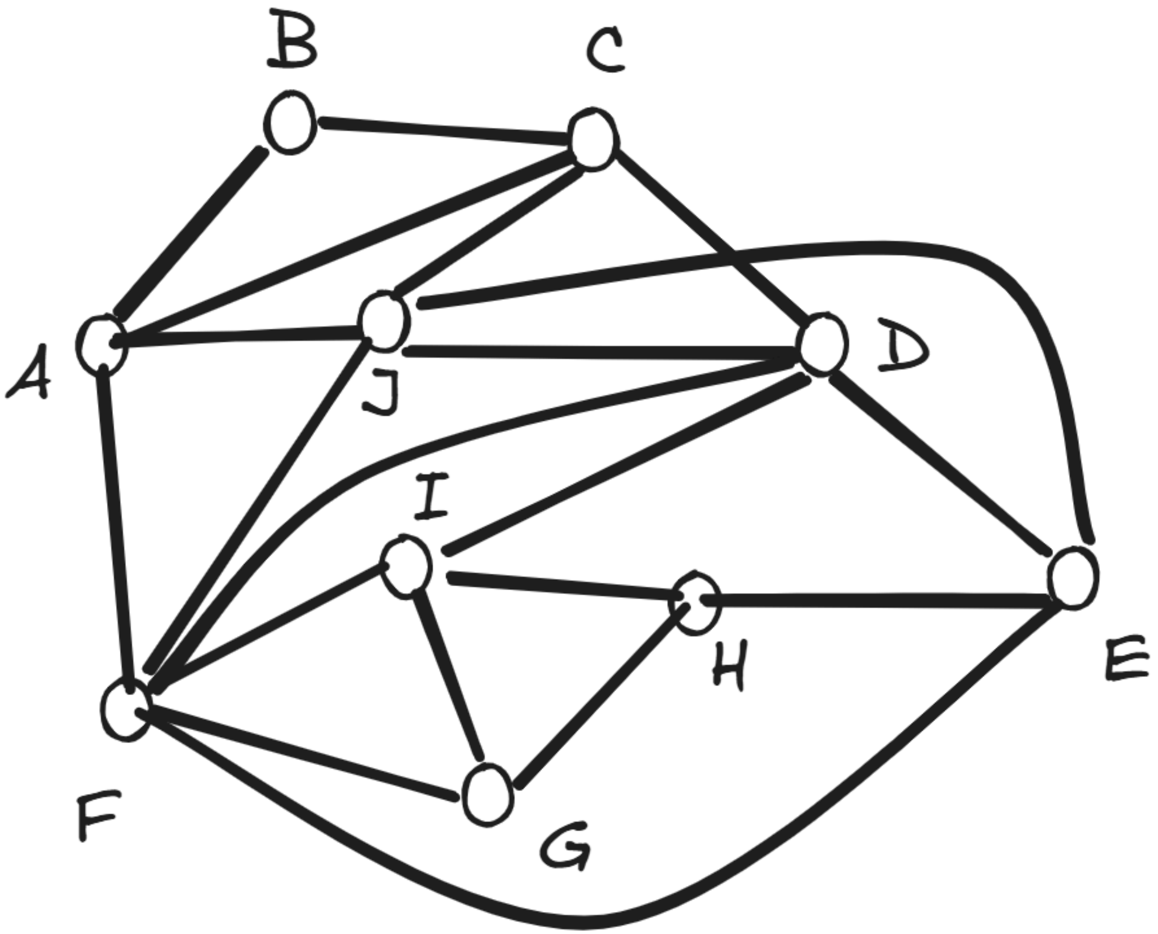
**Vhod:** $G = \langle E, V \rangle, k$

**Vprašanje:** Ali obstaja $V' \subseteq V, |V'| \geq k$,

$$\forall u, v \in V' : v \neq u, (u, v) \in E$$

# Primer

- Ali obstaja klika velikosti 3?
- Ali obstaja klika velikosti 4?
- Ali obstaja klika velikosti 5?



# Problem prereza grafa

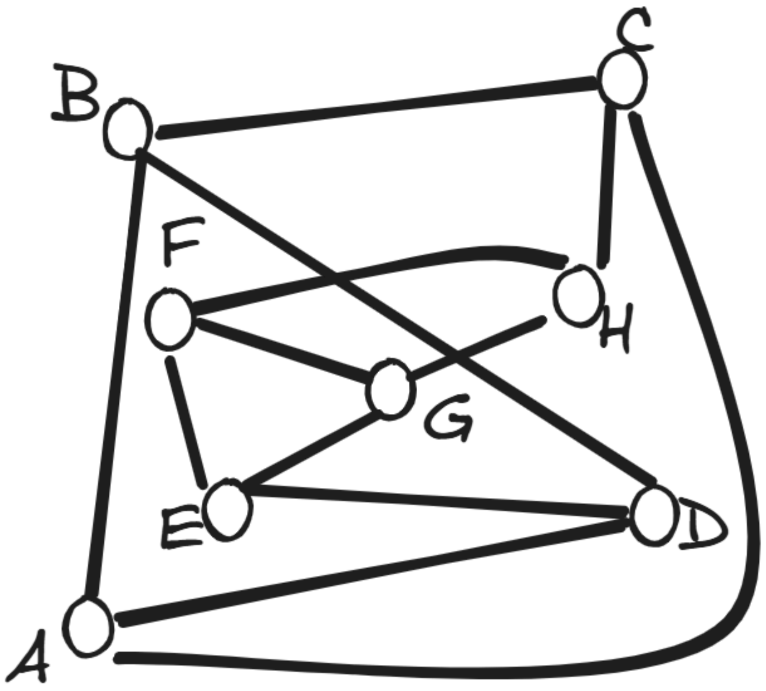
**Vhod:** $G = \langle E, V \rangle, k$

**Vprašanje:** Ali obstaja razbitje $V$ na $V', V \setminus V'$, da

$$C = \{(u, v) \in E \mid u \in V', v \in V \setminus V'\}, |C| = k$$

# Primer

- Ali obstaja prerez velikosti 4?
- Ali obstaja prerez velikosti 3?
- Ali obstaja prerez velikosti 2?



# Vsota podmnožice

**Vhod:** Končna množica $A \subset \mathrm{N}$, $k \in \mathrm{N}$

**Vprašanje:** Ali obstaja $A' \subseteq A$, da velja:

$$\sum_{a \in A'} a = k$$

# Primer

$$A = \{81, 79, 63, 58, 41, 35, 27, 21, 19, 11\}, k = 199$$

# Faktorizacija

**Vhod:** cela števila $a, b, n$

**Vprašanje:** Ali obstaja praštevilski delitelj števila $n$ v intervalu $[a, b]$?

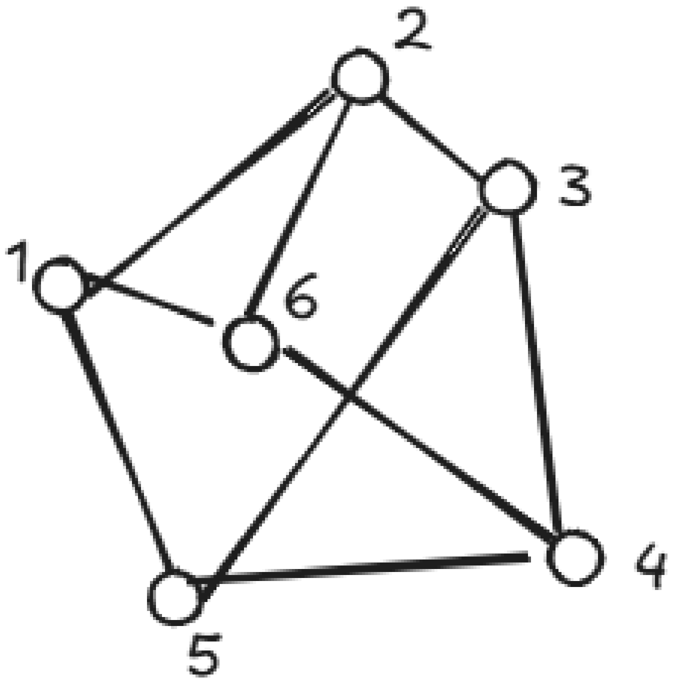
# Izomorfizem grafov

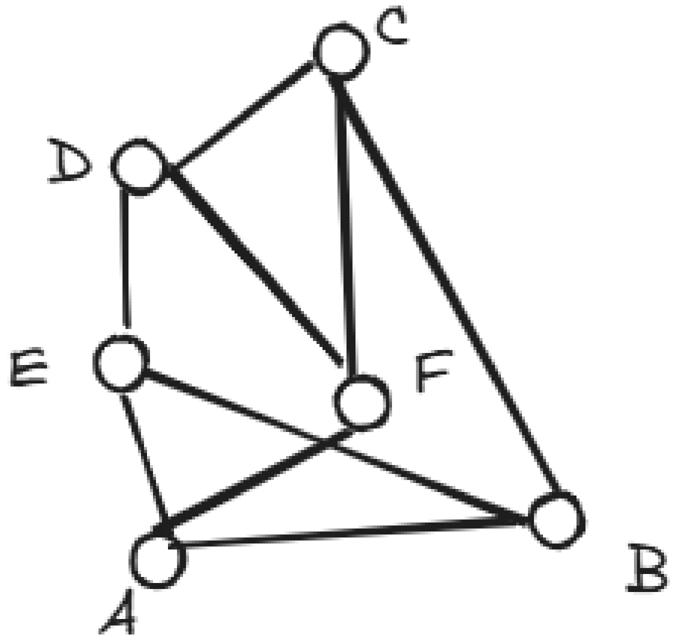
**Vhod:** Enostavna, neusmerjena grafa $G = \langle V, E \rangle$, $H = \langle U, F \rangle$

**Vprašanje:** Ali obstaja bijekcija $f : V \to U$, da velja

$$(v_1, v_2) \in E \iff (f(v_1), f(v_2)) \in F$$

# Primer



# Sklopi predmeta

1. Razredi računske zahtevnosti
2. Naključnost
3. Aproksimacija

# Literatura


- Sanjeev Arora, Boaz Barak. Computational Complexity: A Modern Approach. Cambridge University Press, 2009.
  - osnutek na voljo na: https://theory.cs.princeton.edu/complexity/book.pdf
- Boaz Barak. Introduction to Theoretical Computer Science. Online učbenik, 2023.
  - Na voljo na: https://introtcs.org/public/index.html
- David P. Williamson, David B. Shmoys. The Design of Approximation Algorithms. Cambridge University Press, 2011.
  -osnutek na voljo na: http://www.designofapproxalgs.com/

# Literatura za danes

Arora, Barak - **poglavje 1.**

# Računski model

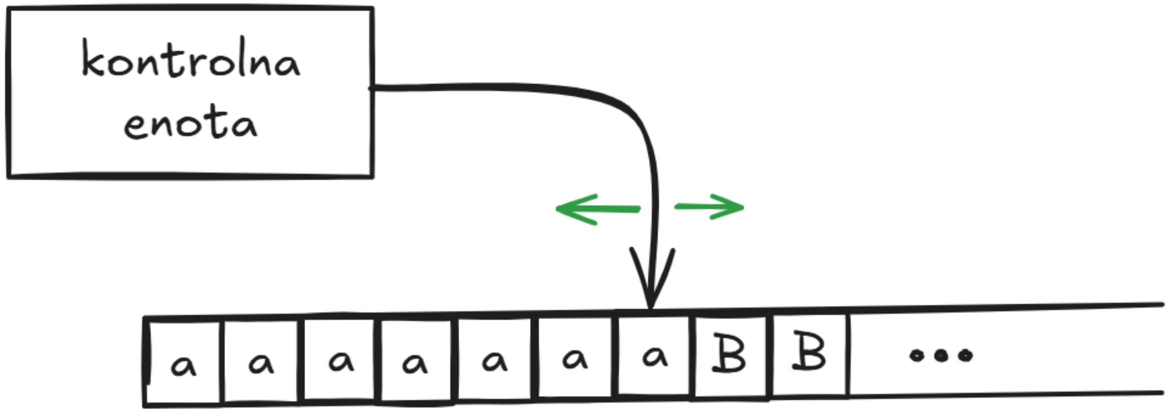
- formalni (matematični) opis pojma računanje
- nabor komponent sistema in pravila (tipično enega koraka) za izračun
- **cilj:** raziskati meje računanja, odkriti zakonitosti, potencialne izboljšave, nove algoritme, ...
- **primeri:**
  - končni avtomati
  - RAM model
  - celični avtomati
  - $\lambda$-račun
  - Turingov stroj

# Turingov stroj

# Ekspres zgodovina

- **David Hilbert** (1910) - potreba po formalni definiciji algoritma
- **Alan Turing**: On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem (1936)
- **Alonzo Church**: An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory (1936)

# Shematski prikaz TS



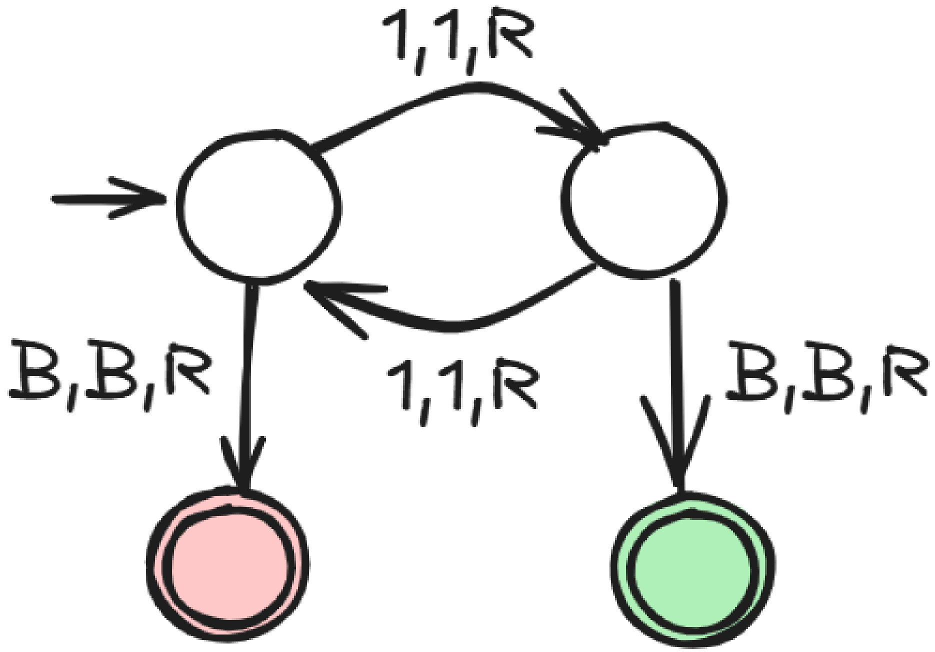
# Formalna definicija TS

$$M = \langle Q, \Gamma, \delta, q_0, q_F, q_R \rangle$$

- $B$ (blank) je privzeti simbol na traku
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
- $q_F$ je stanje sprejetja, **stroj se takoj ustavi**
- $q_R$ je stanje zavrnitve, **stroj se takoj ustavi**

# Podajanje TS

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, R)$$
$$\delta(q_1, 1) = (q_0, 1, R)$$
$$\delta(q_0, B) = (q_R, B, R)$$
$$\delta(q_1, B) = (q_F, B, R)$$



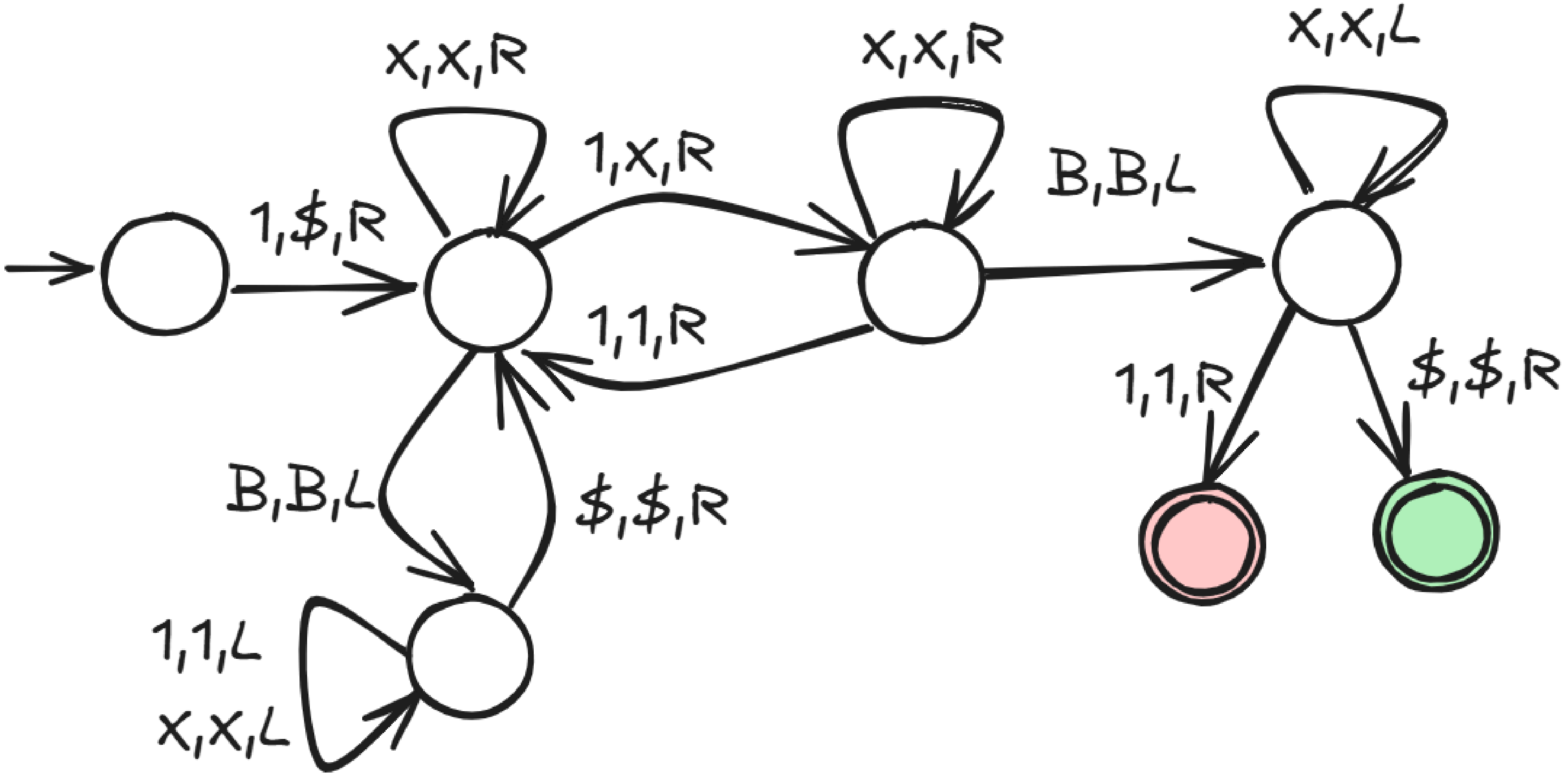
# Sled izvajanja TS

Zaporedje trenutnih opisov (konfiguracij).

# Primer : številski problem

$$L = \{a^{2^n}\}$$

# Rešitev



# Church-Turingova teza

Vsak fizikalno realizabilen računski model je mogoče simulirati na Turingovem stroju.

# Glavni rezultati o TS

- formalizacija pojma algoritem (CT teza)
- obstoj neizračunljivih problemov (polodločljivih, neodločljivih)
- velik nabor ekvivalentnih modelov (enaka izrazna moč kot večina prej omenjenih modelov)

# Čas izvajanja

# Razširjena CT teza

Vsak fizikalno implementabilen računski model je mogoče simulirati na Turingovem stroju s polinomsko upočasnitvijo.

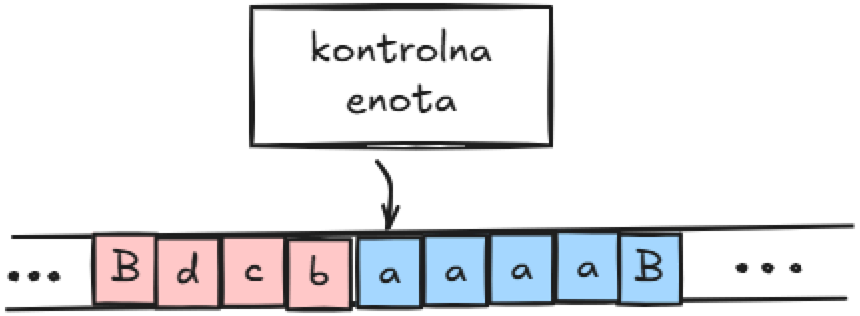
# Razširitve in ekvivalentnost

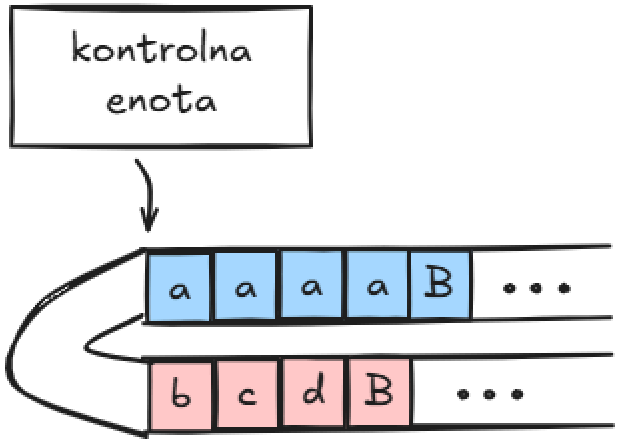
- različne abecede
- neskončnost v obe smeri
- večtračnost
- RAM model

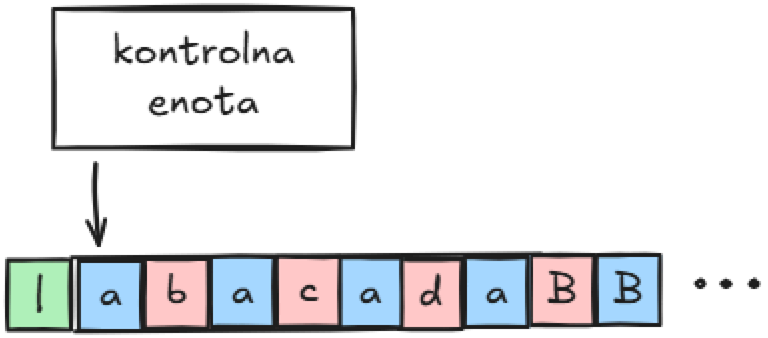
# Simulacija v binarni abecedi

- simbol iz $\Gamma$ zakodiramo z $\lg(|\Gamma|)$ znaki
- en korak v originalnem stroju simuliramo z $O(\lg(|\Gamma|))$ koraki

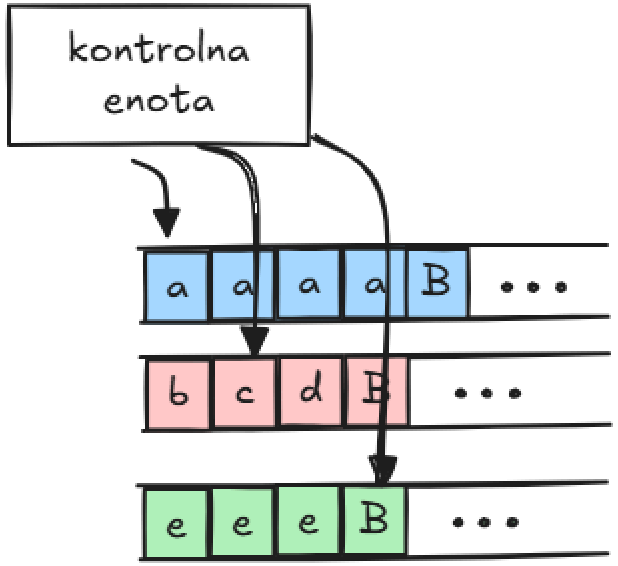
# Simulacija neskončnosti v obe smeri



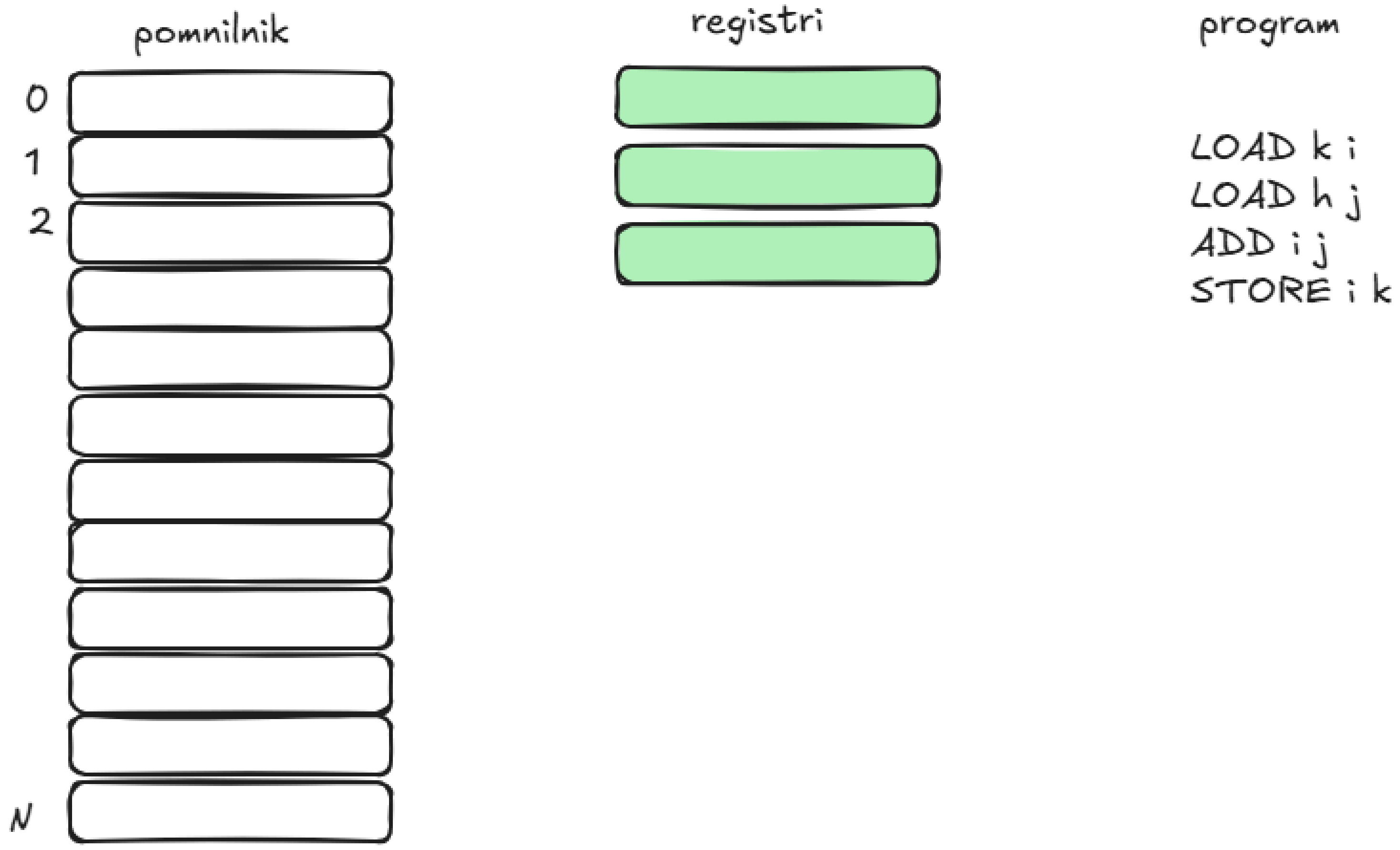



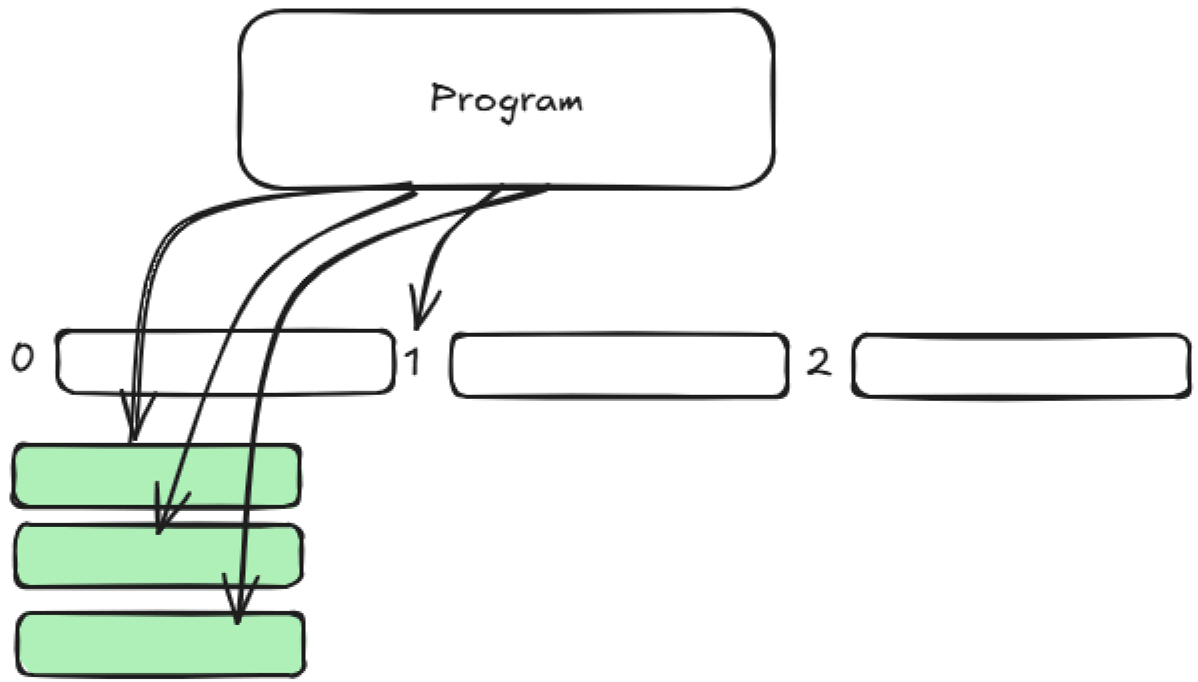



# Simulacija večtračnosti




# Simulacija RAM modela




Program
0
1
2

# Časovna zahtevnost TS

**def. Časovna zahtevnost** stroja $M$ je funkcija $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, kjer je $f(n)$ največje število korakov, ki ga naredi $M$ pri nekem vhodu dolžine $n$.

# Razred TIME

**def. Razred računske zahtevnosti** $TIME(t(n))$ je množica jezikov za katere obstaja Turingov stroj s časovno zahtevnostjo $O(t(n))$

# Časovno predstavljive funkcije

**def.** $T(n)$ je **časovno predstavljiva funkcija**, če obstaja Turingov stroj s časovno zahtevnostjo $O(T(n))$

# Razred P

$$P = \bigcup_i TIME(n^i)$$

**intuitivno:** razred rešljivih problemov v znosnem času

# Primeri problemov v $P$

- urejanje
- množenje
- povezljivost grafa
- minimalni prerez grafa
- največje ujemanje v grafu
- …

# Kritike razreda P

Zakaj naj bi $P$ vključeval "lahke" probleme?

# Najslabši primer

Analiza najslabšega primera je preveč pesimistična

# Drugi fizikalno možni modeli

1. natančnost ($\mathbb{N}$ proti $\mathbb{R}$ ) - fizikalni sistemi delajo z realnimi števili?
2. naključnost - vpeljava naključja v same modele
3. kvantna mehanika
4. bolj eksotična fizika (črne luknje, teorija strun, črna materija)

# Odločitveni problemi

Odločitveni problemi so preveč omejujoči

# Kam naprej

- Kaj s težjimi problemi?
- Kakšne so relacije med težjimi problemi?
- Katere algoritmične tehnike so bolj/manj uspešne?
- ...